1 Rappels sur les équations de droites

1.1 Propriété

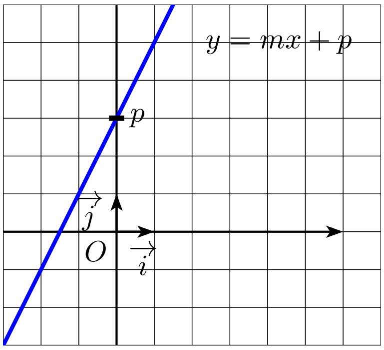
Propriété

Soit $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ un repère orthonormal.
Soit $\mathscr{D}$ une droite.

Deux cas sont possibles :

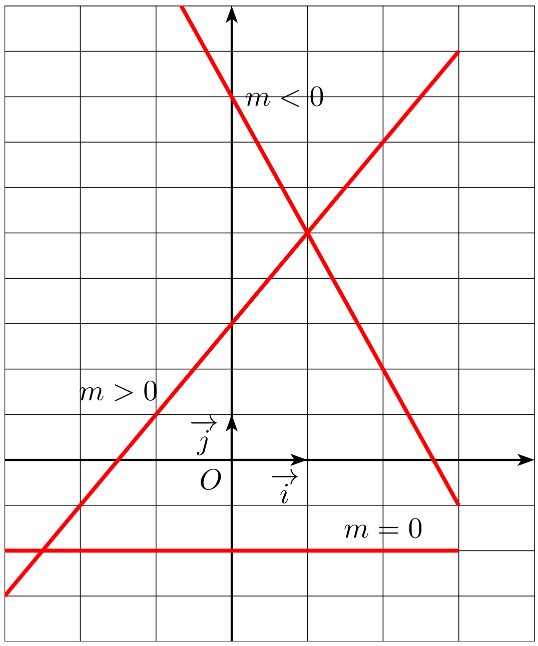
- $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées : tous les points de $\mathscr{D}$ ont la même abscisse k.
  On dit alors que l'équation de $\mathscr{D}$ est : $\boxed{x = k}$
- $\mathscr{D}$ est sécante à l'axe des ordonnées.
  Les coordonnées $(x\ ;\ y)$ des point de $\mathscr{D}$ sont liées par une relation de la forme $y = mx + p$.
  m et p sont caractéristiques de $\mathscr{D}$:
  * p est appelé **l'ordonnée à l'origine** de $\mathscr{D}$.
  * m est le **coefficient directeur** de $\mathscr{D}$.

p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

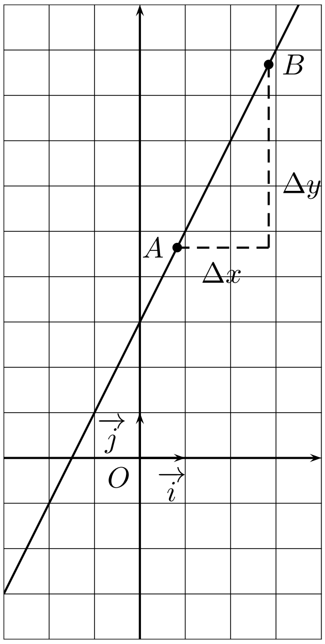


m mesure l'inclinaison de la droite. (Si α est l'angle que fait la droite par rapport à l'horizontale, on a : $m = \tan(\alpha)$

- Si $m > 0$, la fonction affine associée à la droite est croissante.
- Si $m = 0$, la fonction affine associée à la droite est constante et la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.
- Si $m < 0$, la fonction affine associée à la droite est décroissante.



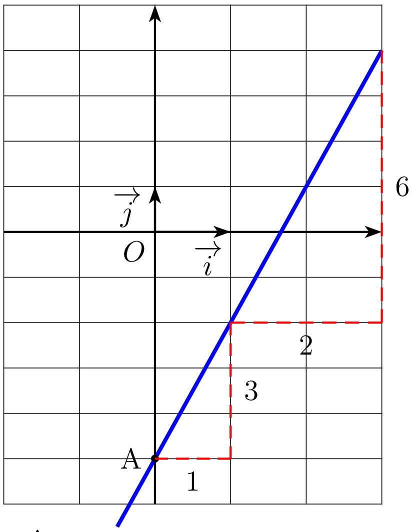
1.2 Interprétation graphique du coefficient directeur :



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Comment utiliser le coefficient directeur pour tracer une droite ?

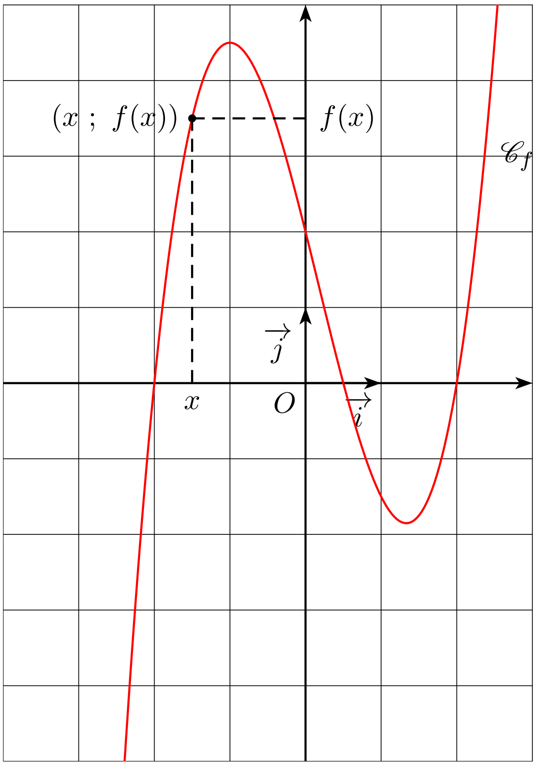
Exemple : Tracer la droite d'équation $y = 3x - 5$.
Pour $x = 0$, on a $y = 3 \times 0 - 5 = -5$ donc cette droite passe par le point A de coordonnées $(0\ ;\ -5)$.
Son coefficient directeur est $m = 3$.
Nous avons vu que le coefficient directeur pouvait s'écrire $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
Par conséquent : $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ donc $\Delta y = m \times \Delta x$.
Ici : $m = 3 = \dfrac{3}{1}$
Si l'on **choisit** de prendre $\Delta x = 1$, alors $\Delta y = 3$. Par conséquent, en partant de A, l'on se déplace de 1 unité en abscisses et de 3 unités en ordonnées.



Si m est le coefficient directeur, on a : $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ donc $\Delta y = m \times \Delta x$; en choisissant une valeur pour Δx, on calcule la valeur correspondante pour Δy.
Si, au lieu de prendre $\Delta x = 1$, on avait pris $\Delta x = 2$, on aurait trouvé $\Delta y = 3 \times 2 = 6$; en partant de n'importe quel point de la droite (A ou un autre), si l'on se déplace de 2 unités parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace dans le même temps de 6 unités parallèlement à l'axe des ordonnées.

2 Rappels sur les courbes représentatives d'une fonction

Si f est une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$.



3 Nombre dérivé d'une fonction et fonction dérivée

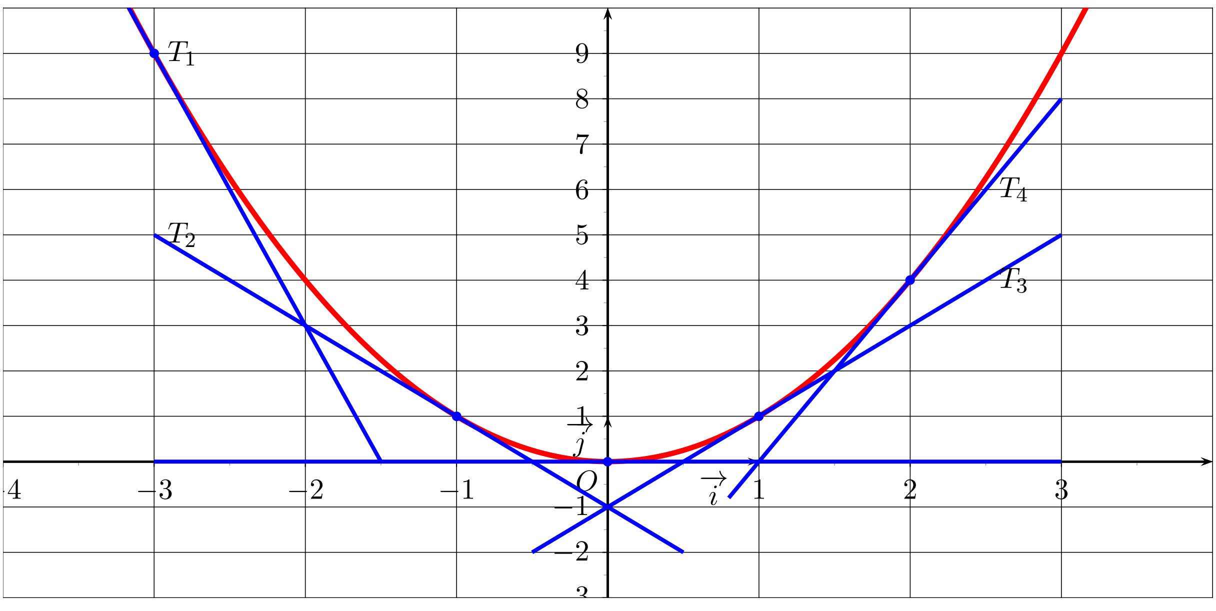
Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.

Si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, on note $\mathbf{f'(a)}$, **nombre dérivé de f** en a, le **coefficient directeur** de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point.

Exemple : Avec la fonction carrée

Soit la courbe représentative de f définie par $f(x) = x^2$



1. On trouve graphiquement $f'(-3) = -6$, $f'(-1) = -2$, $f'(0) = 0$, $f'(1) = 2$ et $f'(2) = 4$.

   En effet, T_1 passe par les points de coordonnées $(-3\ ;\ 9)$ et $(-2\ ;\ 3)$, donc $f'(-3) = \dfrac{3-9}{-2-(-3)} = -6$.

T_2 passe par les ponts de coordonnées $(-2\ ;\ 3)$ et $(-1\ ;\ 1)$ donc $f'(-1) = \dfrac{1-3}{-1-(-2)} = -2$.

(xx') a un coefficient directeur nul.

T_3 passe par les points de coordonnées $(1\ ;\ 1)$ et $(2\ ;\ 3)$ donc $f'(1) = \dfrac{3-1}{2-1} = 2$.

T_4 passe par les points de coordonnées $(2\ ;\ 4)$ et $(1\ ;\ 0)$ donc $f'(2) = \dfrac{0-4}{1-2} = \dfrac{-4}{-1} = 4$.

2. Pour x_A réel, on peut conjecturer que $f'(x_A) = 2x_A$.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f', qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x est défini sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f'(x) = 2x}$

3.1 Dérivée de fonctions usuelles

Définition

Si une fonction f définie sur un intervalle I admet en tout point de I un nombre dérivé (donc si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en ce point), on dit que f est dérivable sur I.
La fonction qui, à tout réel x, associe le nombre dérivé $f'(x)$, est appelé e fonction dérivée de f ; on la note f'.

Voici le tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles (à savoir par cœur).

$f(x) =$	$f'(x) =$
$k,\ k \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n $(n \in \mathbb{N}\ n > 1)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}(x \neq 0)$	$-\frac{1}{x^2}$

Exemples :

1. $f(x) = x^5$; $f(x) = x^n$ avec $n = 5$;
   $f'(x) = nx^{n-1} = 5x^4$
2. $f(x) = x^6$; $f(x) = x^n$ avec $n = 6$ donc
   $f'(x) = nx^{n-1} = 6x^5$
3. $f(x) = x^{10}$.
   $f(x) = x^{10} = x^n$ avec $n = 10$ donc
   $f'(x) = nx^{n-1} = 10x^9$

3.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k une constante.
Alors, on a les formules suivantes :

Addition :	$(\mathbf{u}+\mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$
Soustraction :	$(\mathbf{u}-\mathbf{v})' = \mathbf{u}' - \mathbf{v}'$
Multiplication par une constante :	$(\mathbf{ku})' = \mathbf{ku}'$
Produit de deux fonctions :	$(\mathbf{uv})' = \mathbf{u}'\mathbf{v} + \mathbf{uv}'$
Inverse d'une fonction :	$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{u}}\right)' = -\frac{\mathbf{u}'}{\mathbf{u^2}}$ $(v(x) \neq 0 \quad \text{sur } I)$
Quotient de deux fonctions :	$\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)' = \frac{\mathbf{u}'\mathbf{v} - \mathbf{uv}'}{\mathbf{v^2}}$ $(v(x) \neq 0 \quad \text{sur } I)$

Exemples :

1. $f(x) = 3x^2$; on peut voir cela comme $f(x) = kg$ avec $k = 3$ et $g(x) = x^2$; $f' = (kg)' = kg'$ donc $f' = 3g'$ avec $g'(x) = 2x$ d'où $\boxed{f'(x) = 3 \times 2x = 6x}$.
2. $f(x) = 5x^7$; on a de même : $f'(x) = 5 \times 7x^6 = 35x^6$. $\boxed{f'(x) = 35x^6}$
3. $f(x) = x^5 + x^2$; $f = u + v$ avec $u(x) = x^5$ et $v(x) = x^2$ donc $f' = (u+v)' = u' + v'$ avec $u'(x) = 5x^4$ et $v'(x) = 2x$. Par conséquent : $\boxed{f'(x) = 5x^4 + 2x}$.
4. $f(x) = \frac{3x+2}{2x+1}$; $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x+2$ et $v(x) = 2x+1$.
   $f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$.
   Alors : $f'(x) = \frac{3(2x+1) - 2(3x+2)}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{(2x+1)^2}$; $\boxed{f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}}$
5. $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 1$ et $v(x) = x^2+x+1$ d'où $f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 0$ et $v'(x) = 2x+1$.
   Par conséquent : $f'(x) = \frac{0(x^2+x+1) - 1(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$ donc $\boxed{f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}}$

Exercice : Equation de la tangente en un point d'une courbe représentative

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 6$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse -1.

Méthode

1. Calculer $f'(x)$:
$$\boxed{f'(x) = 3x^2 + 6x + 4}$$
2. En déduire alors $f'(-1)$
$$\boxed{f'(x) = 3x^2 + 6x + 4}$$
$$\boxed{f'(-1) = 3 \times (-1)^2 + 6 \times (-1) + 4 = 1}$$
3. Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse -1 est 1 donc $\boxed{m = 1}$

   L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse -1 est donc :
$$y = mx + p = x + p \qquad \textbf{avec m} = \textbf{1}$$
   Or pour $x = -1$ $f(x) = f(-1) = -8$ donc les coordonnées du point $A(-1; -8)$,qui appartient à C_f et donc aussi à la tangente, vérifient l'équation de la tangente :
$$-8 = -1 + p \qquad \textbf{avec y} = \textbf{-8 et x} = \textbf{-1}$$
   $-8 = -1 + p$ on "switch" : $-1 + p = -8$ donc $p = -7$

   Conclusion : l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse -1 est donnée par :
$$\boxed{y = x - 7}$$

4 Applications de la dérivation : variations et extremums locaux d'une fonction

Théorème
Soit f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geqslant 0$ sur I, alors f est croisante sur I.
- Si $f'(x) \leqslant 0$ sur I, alors f est décroisante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est constante sur I.

Pour étudier les variations d'une fonction, on est donc amené à étudier le signe de la dérivée de cette fonction.

Exemples :

1. Etudier les variations de $f : x \longmapsto x^2 + 3x + 5$.
   f est définie sur $\mathbb{R}$.
   $f'(x) = 2x + 3$.
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.
   $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{2}{3}$ et $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{3}{2}$.
   On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{11}{4}$	$\searrow$	

La fonction f admet un maximum local en $-\dfrac{3}{2}$ égal à $\dfrac{11}{4}$

2. Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{5x+4}$ définie sur $\mathscr{D} = \left[-10\ ;\ -\dfrac{4}{5}\right[\cup \left]-\dfrac{4}{5}\ ;\ 10\right[$.
   $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x+3$ et $v(x) = 5x+4$.
   $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 5$.
   Par conséquent : $f'(x) = \dfrac{2(5x+4) - 5(2x+3)}{(5x+4)^2} = \dfrac{-7}{(5x+4)^2}$.
   Pour tout x de $\mathscr{D}$, $(5x+4)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de -7, donc négatif.
   On en déduit le tableau de variations :

x	-10		$-\frac{5}{4}$		10
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\frac{17}{46}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\frac{23}{54}$

   La fonction f admet un maximum local en -10 égal à $\dfrac{17}{46}$ et un minimum local en 10 égal à $\dfrac{23}{54}$

3. Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 15x^2 + 36x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
   $f'(x) = 6x^2 + 30x + 36 = 6(x^2 + 5x + 6)$.
   $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 5x + 6$.
   ?tude du signe : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$.
   L'expression a deux racines : $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{1}}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{1}}{2} = -2$.
   Un trinÙme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et du signe de $-a$ entre les racines.
   $x^2 + 5x + 6$ est donc positif sur $]-\infty\ ;\ -3]$ et sur $[-2\ ;\ +\infty[$ et négatif sur $[-3\ ;\ 2]$.
   On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-26	$\searrow$	-27	$\nearrow$	

   La fonction f admet un maximum local en -3 égal à -26 et un minimum local en -2 égal à -27

page 7
page 7